

Hasard, chaos, systèmes complexes

Mardis (Marc Lachièze-Rey)

Oui en vérité, laissez-moi vous le dire

L'homme doit avoir le chaos en lui pour naître en étoile dansante,

Friedrich NIETZSCHE

Mathématique et hasard, probabilités

Déterminisme et prédictibilité

Chaos

Dynamique, évolution

Irréversibilité (fonction de Lyapounov)

Probabilités, hasard

Systèmes dynamiques

attracteurs étranges, catastrophes

systèmes complexes, émergence...

Probabilités – I; mathématiques et hasard: [pré-]histoire

le terme de **probabilité** était déjà utilisé par Aristote dans un sens différent: quasi-certitude selon l'opinion.

- risque pour les contrats commerciaux : *Traité des contrats* de [Pierre de Jean Olivi](#) (XII^e siècle)
- contrats d'assurance maritime (XVI^e siècle)

Au XVII^e siècle,

Pascal (1654 : résolution du « [problème des partis](#) » :

le chevalier de Méré demanda à son ami **Blaise Pascal** comment partager les gains d'un jeu de hasard qui n'aurait pu être mené à terme. Blaise Pascal (géométrie du hasard) et **Pierre Fermat** jettent alors (1654) les premiers fondements de la **théorie des probabilités**;

Ils seront décrits dans un ouvrage de **Christian Huygens**

De ratiociniis in ludo aleae (raisonnements sur les jeux de dés) (1657):

Valeur moyenne

Valeur la plus probable

Espérance

Blaise Pascal (1623 - 1662)

Enfant précoce

- [mathématicien](#), [physicien](#), [inventeur](#),
- traité de [géométrie projective](#) à seize ans ;
- invente À 19 ans la [calculatrice mécanique](#): *machine d'arithmétique*, [roue] pascaline ...

Il la présenta à la reine Christine de Suède par ces mots :

"Cet ouvrage, Madame, est une machine pour faire les règles d'arithmétique sans plume et sans jetons".

- [philosophe](#) (les [Pensées](#)),
- [moraliste](#) et [théologien](#) ([Les Provinciales](#))
- Hydraulique : [pression](#) , [vide](#)

Blaise Pascal



Probabilités – II: XVIII^e siècle

Ars Conjectandi (1713) de [Jacques Bernoulli](#) (suisse, 1654-1705):

Définition d'une *variable aléatoire*

loi des grands nombres (= premier théorème fondamental des probabilités):

si on répète de façon indépendante un grand nombre de fois un même sondage, à partir d'un certain moment, le résultat obtenu en moyenne ne devrait plus être aléatoire. Par ailleurs, l'erreur commise ne dépend de rien d'autre que de la taille de l'échantillon.

[Abraham de Moivre](#) (1667-1754)

The Doctrine of Chance (Théorie de la probabilité) (1718)

formule des probabilités composées: comment calculer la probabilité d'un événement aléatoire qui dépend de plusieurs autres événements ?

Si on lance une pièce de monnaie un grand nombre de fois, la probabilité est décrite par une [distribution gaussienne](#) -- la fameuse cloche de Gauss.

loi normale (= loi de Laplace-Gauss) (= courbe en cloche)

deuxième théorème fondamental des probabilités)

Application aux rentes viagères: tables de mortalité précises

Le hasard sera formalisé mathématiquement au XX^e siècle...

Jacques II Bernoulli (1654 – 1705)

à 21 ans: chaire de
[physique expérimentale](#) à l'université de Bâle
Allemagne, Italie, Russie
[meurt à trente ans, noyé dans la [Neva](#)]

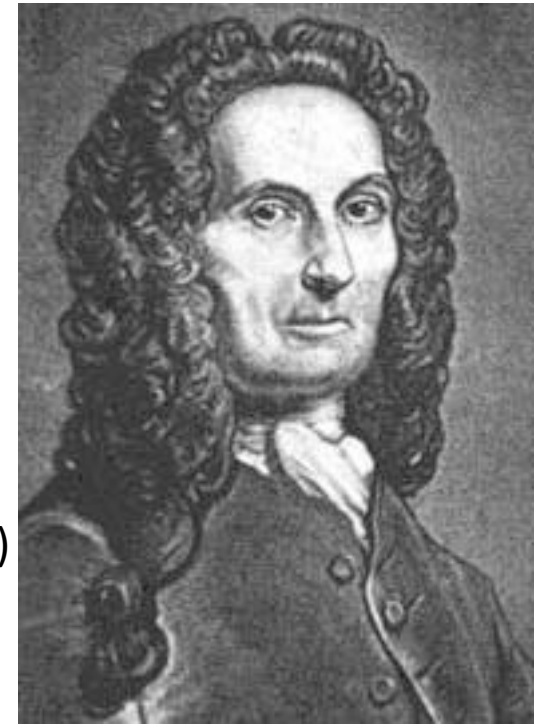
- Droit
Géométrie, [balistique](#), [élasticité](#), hydrostatique...

- calcul différentiel et intégral (Leibniz)
- probabilités ([Loi de Bernoulli](#))



<http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=bernoullijacob>

Abraham de Moivre (1667-1754)



mathématicien

né en France en 1667, puis

émigré en Angleterre après la révocation de l'édit de Nantes (1685)

Ami de Newton

Vie difficile

mort (27 novembre 1754) à Londres, dans la pauvreté.

Il s'était rendu compte qu'il dormait chaque nuit $1/4$ d'heure supplémentaire. S'aidant de cette suite arithmétique, il avait deviné le jour de sa mort, celui où il dormirait pendant 24h

The Doctrine of Chance (Théorie de la probabilité) (1718)

Miscellanea Analytica (mélanges analytiques), 1730

<http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=demoivre>

Probabilités – III

Théorème central limite

Pierre-Simon de Laplace (né en 1749 à Beaumont-en-Auge)

Essai philosophique sur les probabilités (1795) et

Théorie Analytique des Probabilités (1812)

Généralise le résultat en énonçant le "théorème central-limite" qui s'applique dès qu'on a des observations indépendantes. La loi gaussienne décrit ainsi un grand nombre de phénomènes.

[travaux du "mathématicien-fermier" finlandais Lindeberg dans les années 1920]

[applications en physique, en statistique ou en mathématique financière par exemple]

Illustration typique : mouvement brownien [mouvement des graines de Pollen observé par Brown]

- le fait de prendre telle ou telle direction à un instant comporte une part de hasard, indépendante du passé.
- La somme de ces petits hasards fait émerger la loi gaussienne par le théorème central limite et l'évolution de ces processus est décrite par le mouvement brownien.

- nombreux phénomènes

voitures dans un embouteillage, niveaux d'énergie de nucléons, la position des bus dans une ville, zéros de la fameuse fonction zeta de Riemann...

Applications des probabilités

théorème central-limite: La loi gaussienne décrit ainsi un grand nombre de phénomènes.

- Jeux
- Micro-économie
- mathématique financière (évolution des marchés financiers, produits dérivés)
- Évolution biologique
- Physique : mouvement brownien [mouvement des graines de Pollen observé par Brown]
le fait de prendre telle ou telle direction à un instant comporte une part de hasard, indépendante du passé. La somme de ces petits hasards fait émerger la loi gaussienne par le théorème central limite .
- Physique statistique, thermodynamique
- voitures dans un embouteillage (distribution de Tracy-Widom)
- Loi du sinus : niveaux d'énergie de nucléons, position des bus dans la ville de Cuernavaca (Mexico) ou les zéros de la fameuse fonction zeta de Riemann.
- statistique et sondages
- [imagerie médicale](#), astronomie,
- [reconnaissance de caractères](#), filtres anti-[pourriel](#), indexation web
- évaluation des risques dans les installations industrielles...

Probabilités – IV: Développement mathématique de la théorie des probabilités

XIX^e siècle : formalisation mathématique

- Hadamard en France
- Birkhoff, Smale ([médaillé Fields](#) en 1966), Ornstein (USA)
- Kolmogoroff, Sinai, [Vladimir Arnold](#) en Russie
- 1897 notions de [mesure](#) et d'ensembles mesurables : [Émile Borel](#) (France)
- [Henri Léon Lebesgue](#) (France): théorie de l'[intégration](#).
- [Alexandre Liapounov](#) en 1901: première version moderne du [théorème de la limite centrale](#)
[Paul Lévy](#) en 1910: preuve du théorème

Notion d'aléatoire

- 1902, [Andrei Markov](#) : [chaînes de Markov](#) : généralisation de la loi des grands nombres pour une suite d'expériences dépendant les unes des autres.

Nombreuses applications : modéliser la [diffusion](#) en physique ; indexation de sites internet sur Google.

Axiomatisation de la théorie des probabilités

[Kolmogorov](#) (1933)

- 1940: [Kiyoshi Itô](#) : [calcul stochastique](#) et les [équations aux dérivées partielles](#) , lien entre [analyse](#) et probabilités.
- Le mathématicien [Wolfgang Doeblin](#) avait de son côté ébauché une théorie similaire avant de se suicider à la défaite de son bataillon en juin 1940. Ses travaux furent envoyés à l'Académie des sciences dans un pli cacheté qui ne fut ouvert qu'en 2000.

Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903 - 1987)

« Euclide du XXè siècle »

mathématicien soviétique ;

nombreux travaux en math: logique, topologie, probabilités, systèmes dynamiques, information;

directeur de l'Institut de mathématiques de l'Université de Moscou; nombreux prix...

<http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=kolmogorov>

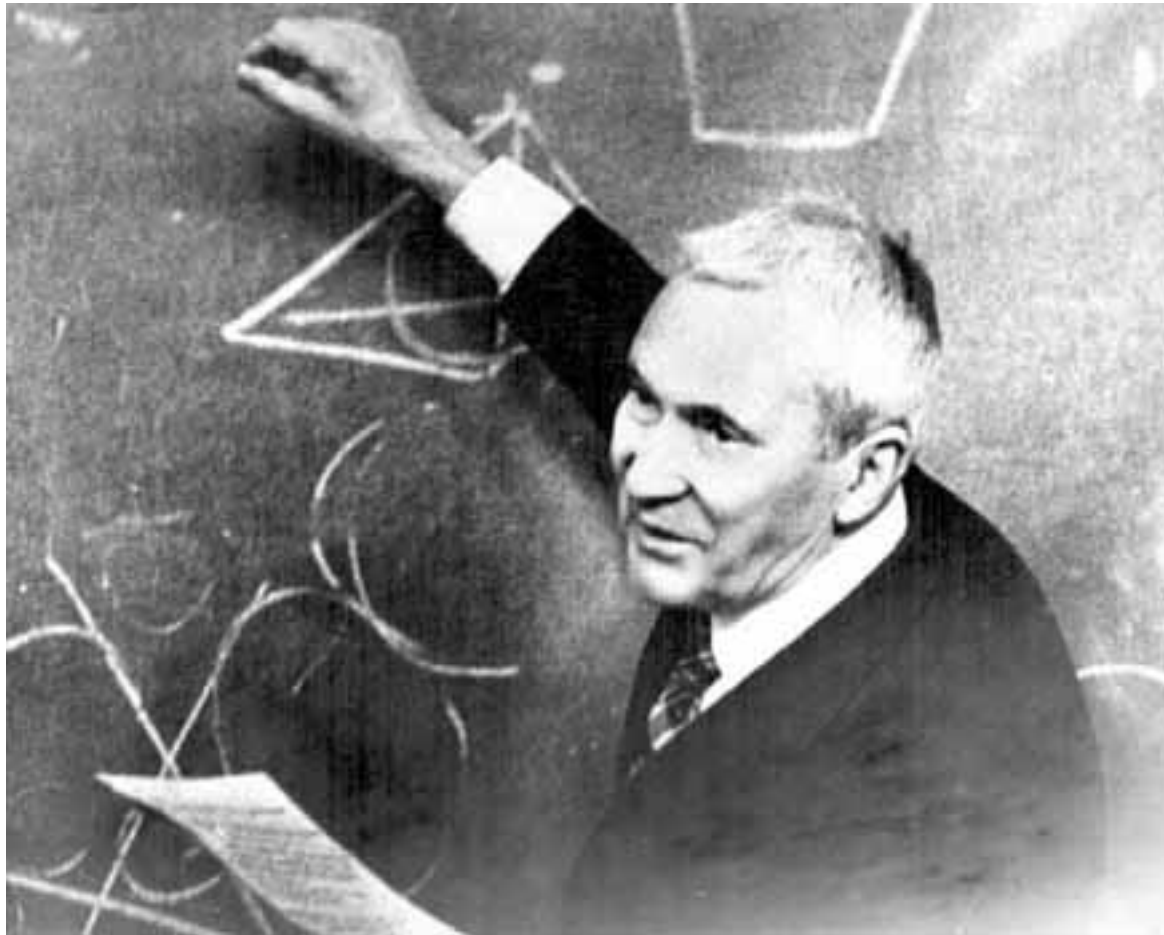
Formalisation de la théorie des probabilités sous une forme axiomatique :

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung : Fondements de la théorie des probabilités, 1933

Fondateur (1953) de la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) des systèmes dynamiques.

Test/ entropie/ information /complexité...

Kolmogorov



ARNOLD

Vladimir Igorevitch,

1934-2010

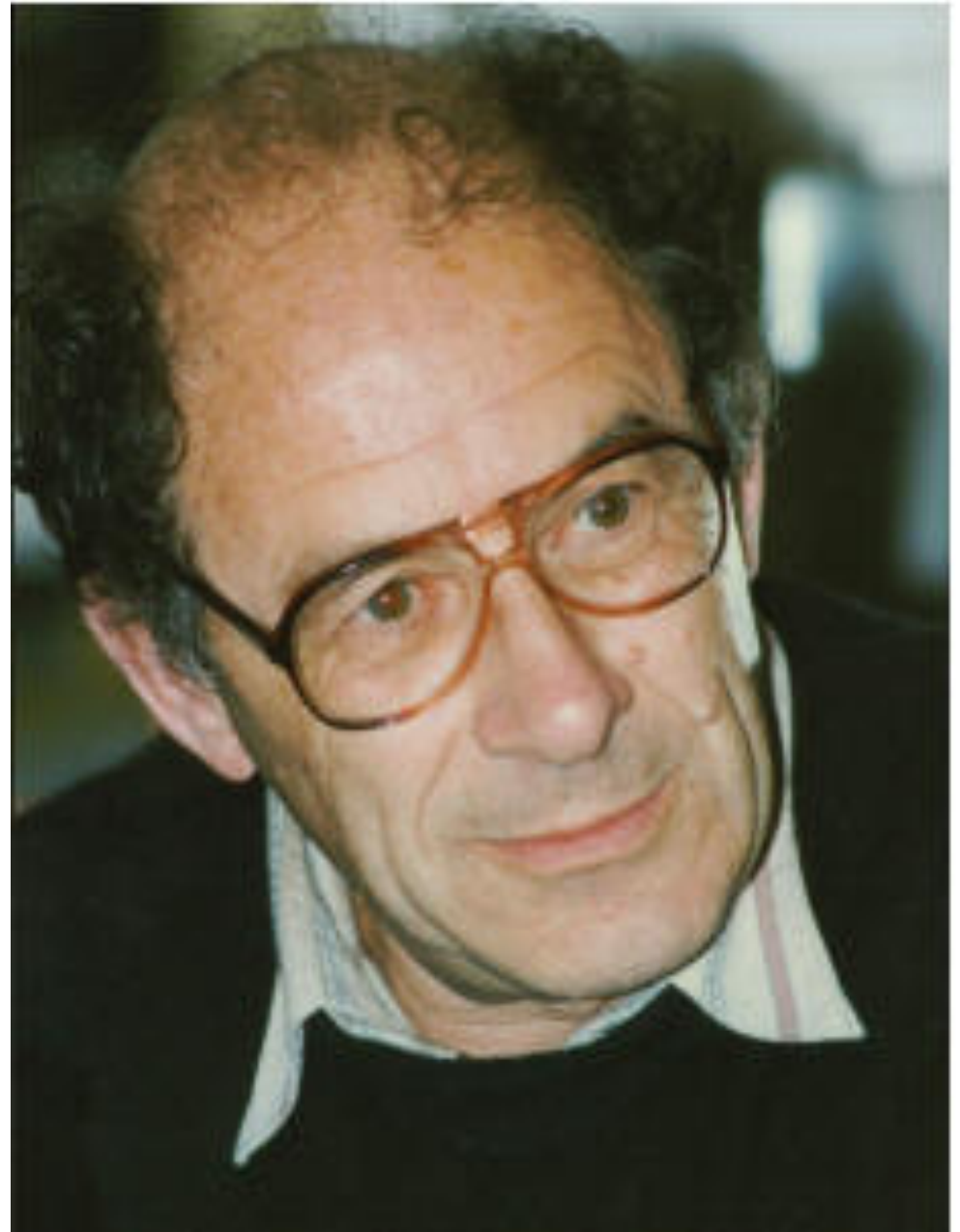
russe : Moscou , Paris

[systèmes dynamiques](#)

[théorie des catastrophes](#)

(prolonge les travaux

de [Thom](#))



Systèmes dynamiques

Théorie des Systèmes dynamiques:

étude de l'évolution d'un système dont on connaît les lois d'évolution (régi par des équations différentielles)
(systèmes *simples* (petit nombre de variables) et
systèmes *complexes* (grand nombre de variables en interaction) : météo, climat, cosmologie, économie, finance...

- Au XVII^e siècle

mécanique céleste: [Lagrange](#) (1764) étudie les perturbations des orbites planétaires ([calcul des variations](#))

[Puis Laplace](#) prouve la stabilité du système solaire.

- Au XIX^e siècle, Poincaré

La théorie des systèmes dynamiques est vraiment née avec le traitement par [Poincaré](#)

du *problème des trois corps* (1881-1890): *Sur les courbes définies par des équations différentielles, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*

- Puis [Kolmogorov](#)... et d'autres:

[Birkhoff](#) (théorie moderne dans les années 1930)

[Stephen Smale](#) (médaillé Fields en 1966)

Poincaré → *Théorie du Chaos*. comportement particulier de certains systèmes dynamiques:

→ *attracteurs étranges* (David Ruelle);

fractales (Benoît Mandelbrot, Jean-Christophe Yoccoz)

théorie des catastrophes de René René [Thom](#)

LAGRANGE Joseph Louis (Comte de-, 1736-1813)

Italie, Berlin, France

Traverse la Révolution sans être inquiété

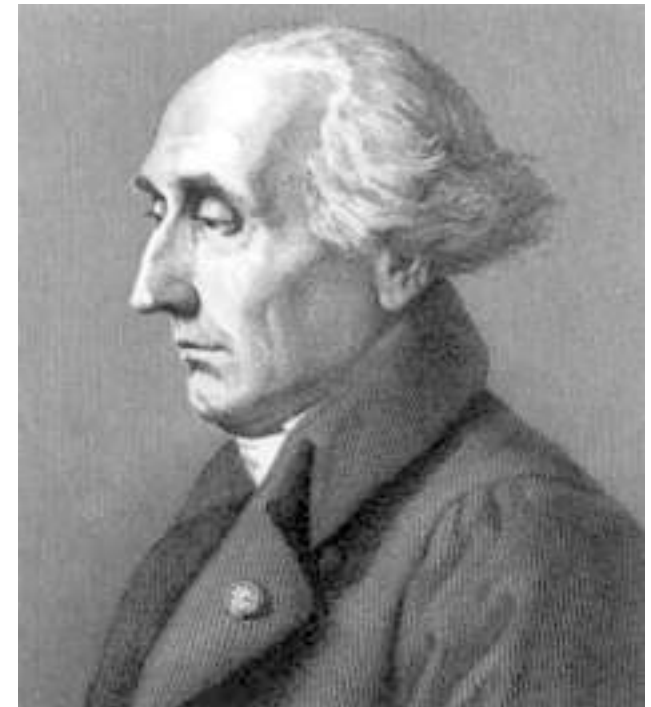
Président de la Commission des poids et des mesure:

un des pères du système métrique et

de l'adoption de la division décimale des mesures.

participe à la création de l'*Ecole Polytechnique*

(alors *Ecole Centrale des Travaux Publics*): premier professeur d'analyse,



Mathématique, dynamique,

Probabilités, astronomie

explique les perturbations des orbites planétaires en appliquant le *calcul des variations* à la théorie newtonienne.

Nouvelle approche très originale : → géométrie symplectique (Souriau)

Mécanique analytique (1788):

Causalité, Déterminisme, **Prédictibilité**

Causalité

Le futur d'un système ne dépend que du passé et du présent

Déterminisme

Démon de Laplace

la connaissance **exacte** de l'état initial permet de prédire son futur (et son passé) avec certitude);

Le futur (ou le passé) découle d'une manière *unique du présent*.

Prédictibilité : on sait prédire l'état futur du système

Le Déterminisme n'implique pas la prédictibilité : c'est l'essence du chaos.

Tout ceci inaugure la théorie des systèmes dynamiques

Aujourd'hui, on peut faire des prédictions probabilistes, et estimer leur valeur grâce aux théorème de la théorie des probabilités.

Le cas de la physique quantique est particulier.

Déterminisme, Pierre Simon de Laplace

Essai philosophique sur les probabilités de 1776.

L'état présent du système de la Nature est évidemment une suite de ce qu'il était au moment précédent, et si nous concevons une intelligence qui, pour un instant donné, embrasse tous les rapports des êtres de cet Univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le passé ou dans l'avenir la position respective, les mouvements et, généralement, les affections de tous ces êtres. L'astronomie physique (...) nous offre une idée, quoique imparfaite, de ce que serait une semblable intelligence. La simplicité de la loi qui fait mouvoir les corps célestes, les rapports de leurs masses et de leurs distances permettant à l'Analyse de suivre, jusqu'à un certain point, leurs mouvements, et pour déterminer l'état du système, il suffit au géomètre que l'observation lui donne leurs positions et leurs vitesses pour un instant quelconque... »

Pierre Simon de Laplace (marquis de-, 1749-1827)

astronome, physicien, mathématicien,
Politicien: inspecteur des armées avant la
révolution de 1789, ministre sous [Bonaparte](#), et
[Napoléon](#), marquis sous Louis XVIII.



- *Essai philosophique sur les probabilités* (1776).
- traité de *Mécanique céleste* (5 volumes édités entre 1799 et 1825) : synthèse du système solaire basée sur la gravitation universelle de Newton.
- *Exposition du système du monde* (1796)

« *Mais où est Dieu dans tout cela ?*

- *Sire, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse... ».*

Systèmes dynamiques

- Un système peut être déterministe ou non.
- La **physique classique** (non quantique) décrit tous les systèmes comme déterministes. Ils peuvent être alors plus ou moins prédictibles. Un système non prédictible est dit chaotique. Le **chaos** est un aspect d'une nouvelle discipline qui s'est développée au début du XX^e :
- La **physique quantique** est interprétée par certains comme décrivant une évolution non déterministe. On ne peut prédire le résultat d'une expérience, mais seulement la probabilité des différents résultats.
- Un système complexe ne peut être décrit que statistiquement (pour des raisons pratiques). On ne peut pas pré «voir tous les détails de son évolution mais seulement certains traits très généraux (chaud + froid → tiède). Ceci grâce aux probabilités et à leurs théorèmes.
- Il y a du hasard mais il n'est que la manifestation de notre ignorance. (en physique quantique, il pourrait y avoir un hasard d'une autre sorte...).

Poincaré

- À l'occasion de son soixantième anniversaire, le roi Oscar II (de Suède et de Norvège), crée un prix devant récompenser « **une découverte importante dans le domaine de l'analyse supérieure** ».

Unique réponse : **Poincaré** (1889) :

Mémoire sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.

Il décrit le **mouvement des corps célestes** : les orbites planétaires ne sont pas périodiques ; impossible de prévoir les positions planétaires.

- Impossibilité de prédire ; instabilité des solutions périodiques
 - « il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux : une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le **phénomène fortuit** » (1908)
-
- Ce travail est largement ignoré

Système chaotique

Le système des trois corps en interaction (Poincaré) est un exemple (inattendu) de système chaotique :

dépendance très sensible aux conditions initiales : une faible incertitude sur les données initiales peut conduire rapidement à une incertitude totale sur les résultats: **imprévisible**.

Exemples : pendule, système de 2,3, n corps en interaction (planètes)...

- Que peut on dire sur un système chaotique ?

Une idée de Poincaré

Remplacer l'étude quantitative locale des équations (différentielles) par leur étude qualitative (géométrie).

plus tard...

→ attracteurs étranges

Poincaré, *Science et méthode*, 1903

- *Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au **hasard**. Si nous connaissions **exactement** les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale **qu'approximativement**. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que **de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux** ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le **phénomène fortuit**.*

dissipation

- = perte d'énergie (frottements...)
- On envisage souvent l'évolution d'un système idéal sans dissipation
- Pour un système réel, la dissipation fait « oublier » une partie des conditions initiales: la dynamique d'un système dissipatif n'est pas irréversible.
- Ex.: l'amplitude des oscillations du pendule décroissent au cours du temps

Systèmes complexes

Poincaré : *Science et méthode* (1908): apparition d'un cyclone

- On ne peut exprimer la solution par des fonctions usuelles
- Les méthodes approximatives habituelles ne fonctionnent pas (divergences)
- Les méthodes quantitatives ne donnent pas de résultat.

Poincaré introduit une nouvelle méthode (graphique) pour analyser (développée ensuite par d'autres dont Michel Hénon). On représente le système par une figure complexe : ilots, zones chaotiques...

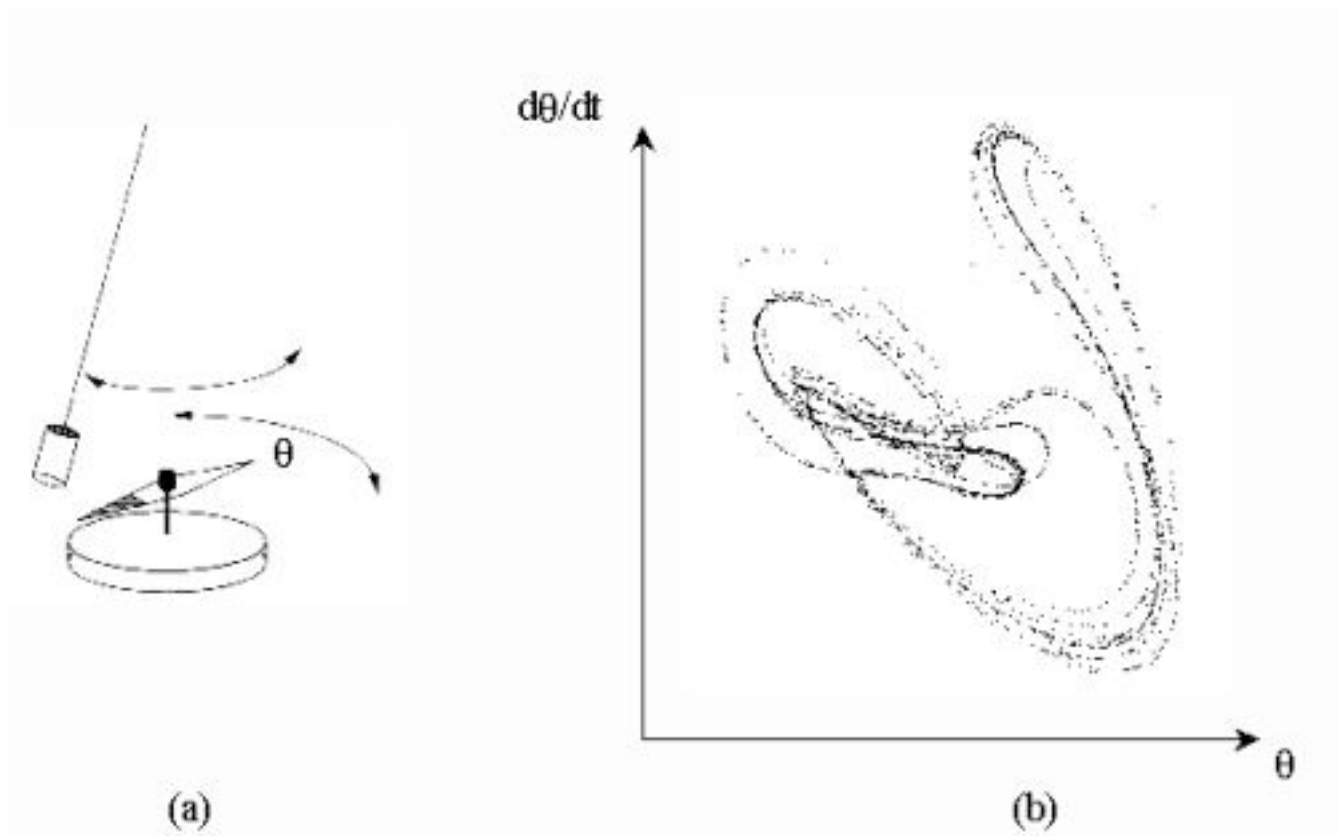
Évolution non prévisible ; non calculable; déterministe mais aléatoire (cf les dés) : **HASARD**

- Exemple mathématique typique : la **transformation du Boulanger** : déterministe et réversible, mais génère du hasard

Poincaré invente une **nouvelle méthode graphique** pour analyser (développée ensuite par d'autres dont Michel Hénon). On représente le système par une figure complexe : ilots, zones chaotiques...

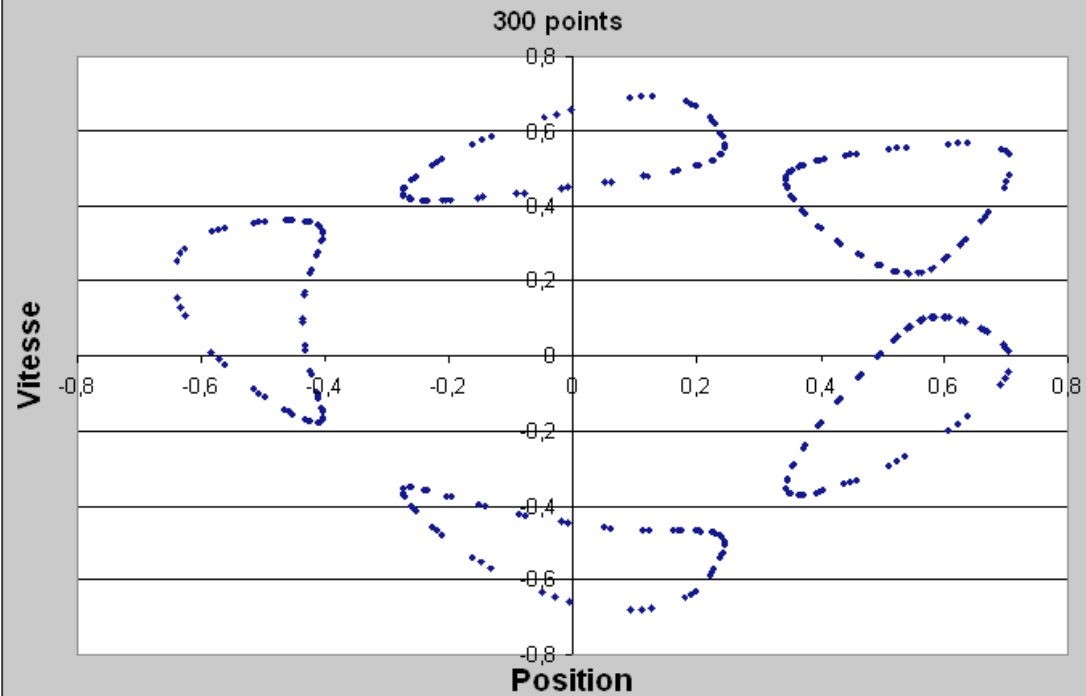
- (Mouvement d'une boussole devant un pendule métallique)

-

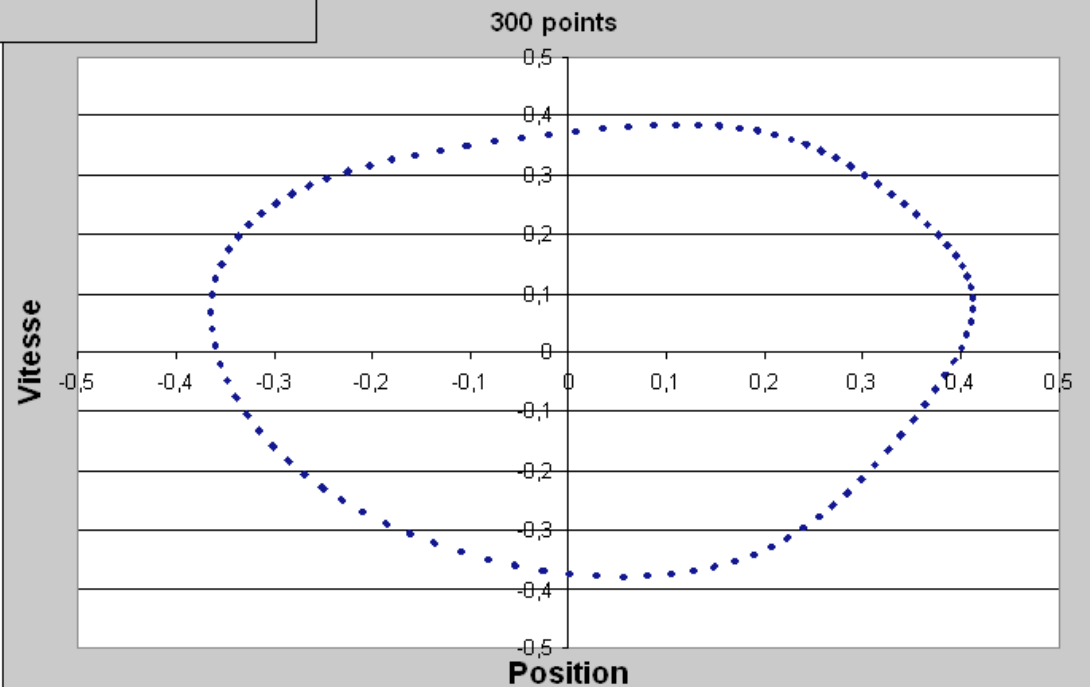


« On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complexité du problème des trois corps, et, en général, de tous les problèmes de la dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme... »
Henri Poincaré Dans « Méthodes nouvelles de la mécanique céleste »

Section de Poincaré de l'Orbite du satellite C3



e Poincaré de l'Orbite du satellite C3



Edward Lorentz : *l'effet papillon*

1959 : Edward Lorentz, mathématicien et météorologue américain (1917-2008)

[MIT](#) (*Massachusetts Institute of technology*),

étudie le développement d'un système météo complexe (12 équations).

Le système n'est pas soluble → résolution par l'ordinateur

des changements minimes sur les conditions initiales régissant les prévisions météorologiques peuvent conduire à des comportements totalement différents (divergents) et insoupçonnés: "*chaotiques*", sur les solutions.

Une petite modification est amplifiée !

Vérification de l'intuition de Poincaré

1972 « le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? »

[les trajectoires potentielles forment une courbe complexe dont la projection ressemble à une aile de papillon]

- sciences de la Terre, astronomie, biologie, anthropologie, sciences humaines, ...
-

Chaos

les dés : impossible de réaliser deux fois
EXACTEMENT la même configuration !

Maxwell:

« c'est une doctrine métaphysique que les mêmes antécédents produisent toujours les mêmes conséquents. Nul ne saurait le contredire. Mais ce n'est que de peu d'utilité dans un monde tel que celui-ci où les mêmes antécédents ne se retrouvent jamais, et où rien ne se reproduit jamais deux fois

Chaos

1971 :David Ruelle (IHES)[[disciple de Thom]

étudie la turbulence dans les fluides avec une nouvelle méthodes d'analyse (en reprenant les travaux de Poincaré) : évolution des phénomènes instables : **attracteurs étranges** qui montrent une nouvelle géométrie.

- Vérif. Expérimentale sur un fluide en 1975
-

Li et Yorke (1975) baptisent **chaos** ce genre de phénomène (**DSCI** = dépendance sensitive aux conditions initiales)

- Applications en chimie, physique fondamentale, génétique des populations, embryologie, (JFG p116, Krisis)

1989... J LAskar : (bureau des longitudes) : comportement de planètes du Système Solaire chaotique sur 200 millions d'années.

-
- Physique quantique
-

Catastrophes

THOM René Frédéric, français, 1923-2002 (médaille [Fields](#) en 1958)

-
- Un système dissipatif finit par s'arrêter d'évoluer (quand il n'a plus d'énergie): dans un état d'équilibre. On l'étudie en étudiant les équilibres possibles (qui peuvent être stables ou instables).
- La correspondance état initial $\rightarrow$ état d'équilibre final est non continue (bassins d'attraction). Le système est finalement décrit comme l'ensemble des équilibres stables.
- Certaines modifications infimes du système engendrent des modifications énormes du résultat de l'évolution: apparition ou disparition de nouveaux équilibres (états finaux) : **catastrophe**
- Disparition d'un équilibre stable, et apparition d'un autre complètement différent !

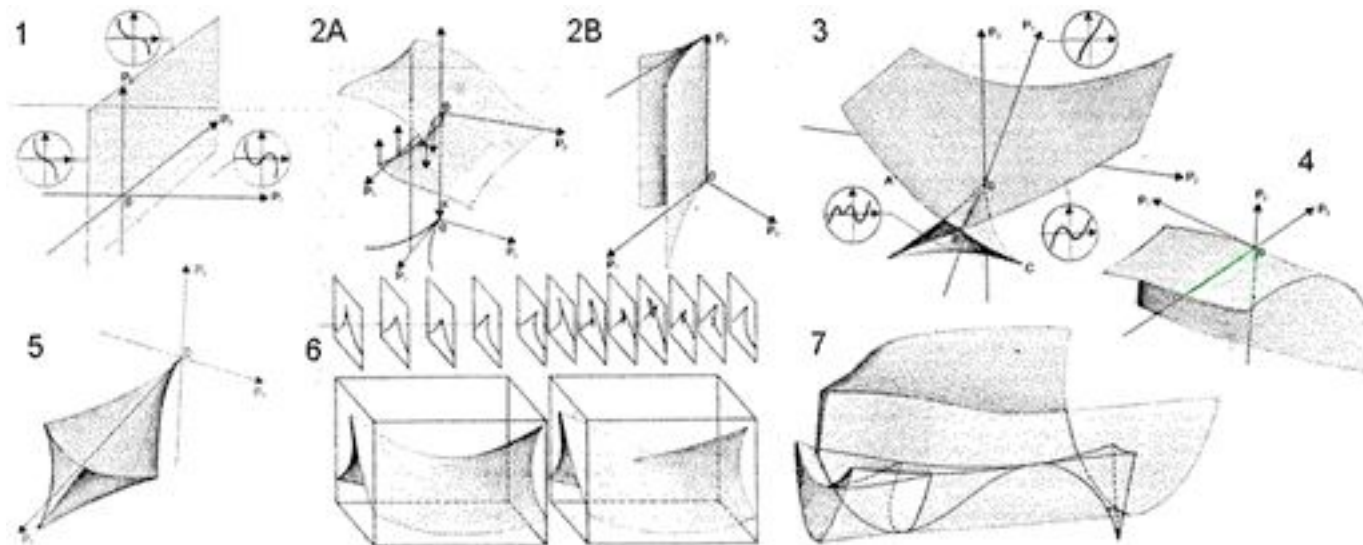
machine à catastrophes de Zeeman

- <http://virole.pagesperso-orange.fr/cata.htm>

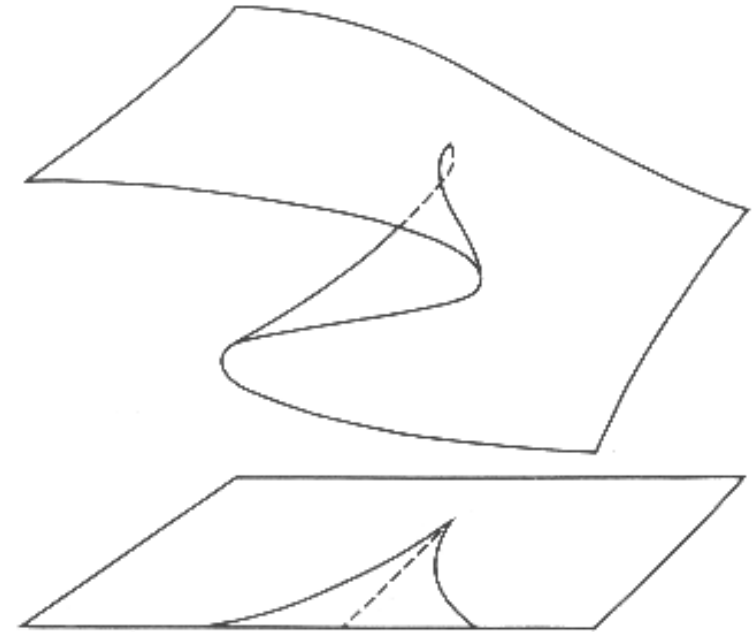
Catastrophes

Il n'existe que sept formes de « catastrophes » élémentaires :

- Pli, fronce
- Queue d'aronde / Ombilic hyperbolique (vague) / Ombilic elliptique (poil)
- Papillon / Ombilic parabolique (champignon)



Catastrophes



René Thom 1990

« J'ai certainement perdu beaucoup de temps ravi par la fascination ferroviaire ; ` mais, en y repensant par la suite, je ne suis pas éloigné de croire que j'ai trouvé dans cette contemplation infantile quelques-uns des ressorts les plus profonds et les plus secrets de mes intuitions de mathématicien topologue et de philosophe catastrophiste.

J'y ai en tout cas trouvé cette idée essentielle : un réseau, dans sa structure "cybernétique » d'événements agissant les uns sur les autres, n'est jamais arbitraire. Il y a toujours une dynamique continue sous-jacente qui l'engendre et l'organise, faute de retrouver cette interprétation originale, l'approche combinatoire, systémique, reste à la surface des choses ».

Catastrophes

Psychopathologie (Benoît Virole)

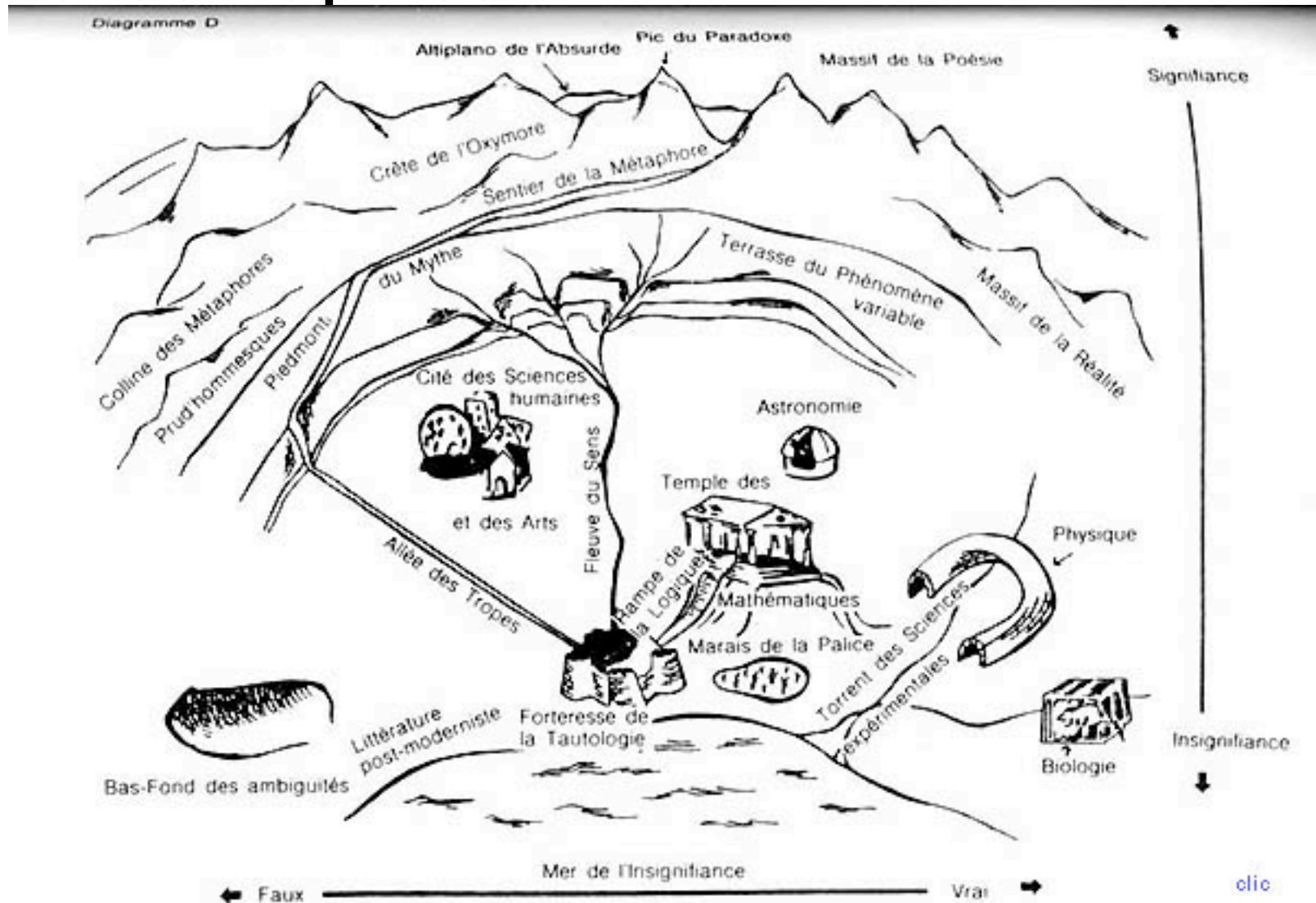
- La vie psychique résulte de l'émergence d'états mentaux
- Les états mentaux résultent de l'interaction entre des attracteurs psychiques (autistique / schizo-paranoïde / dépressif / sublimatoire) qui peuvent subir des bifurcations.
- Les formes apparaissant dans les rêves sont générées par les des catastrophes :
[Météorologie de l'inconscient](#)
- états psychopathologiques modélisables par la théorie des catastrophes (oscillation délire /dépression, oscillation manie / dépression.)

Sciences du langage

- Catégorisations phonologique et sémantique
- Structures syntaxiques fondamentales: La phrase comme drame (Lucien Tesnière).
- Les formes d'écritures pictogrammatiques et idéogrammatiques (Sinogrammes archaïques) révèlent les schémas actanciels des catastrophes élémentaires.
- Les langues des signes des sourds révèlent des processus dynamiques issus des catastrophes élémentaires.
- Les bases neurocognitives des représentations mentales sont des formes issues des catastrophes élémentaires.

-<http://virole.pagesperso-orange.fr/cata.htm>

Catastrophes



Catastrophes

l'ambition de la théorie des catastrophes:

« décrire les phénomènes discontinus à l'aide de modèles mathématiques continus »

La théorie du chaos a supplanté la théorie des catastrophes dans l'imaginaire scientifique et collectif (progrès en puissance de calcul).

Voir

<http://www.larecherche.fr/savoirs/autre/theorie-catastrophes-01-09-1997-84452>

biblio

- *Ivar Ekeland, Au hasard, Seuil, Science ouverte, 1991.*
- *Paraboles et Catastrophes* par René Thom - Ed. Flammarion, Paris, 1983
- Jean-Christophe Yoccoz (médaille Fields 1994: **Théorie des Systèmes dynamiques.**
- <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Laplace.html>