Introduction aux modèles cosmologiques

Avant le Xxè siècle : systèmes du monde

Questions cosmiques 1 : géométrie de l'espace-temps

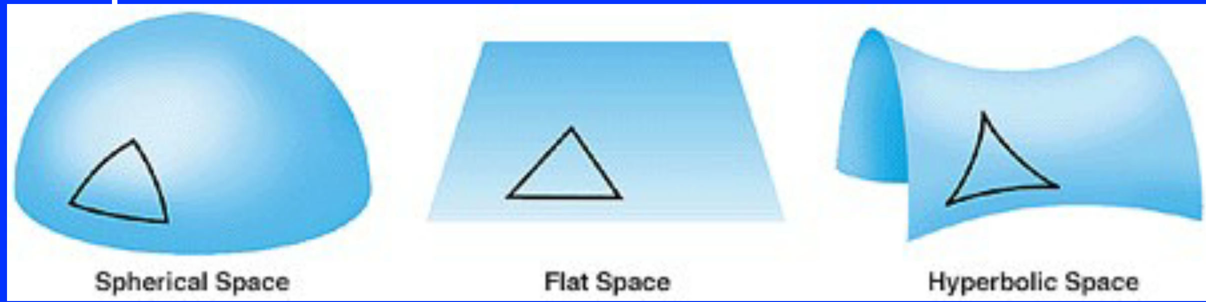
• Forme (géométrique) de l'espace:

plat ou non,

infini ou non,…

courbure spatiale

[et topologie]



• Partie temporelle de la géométrie : évolution

Expansion :

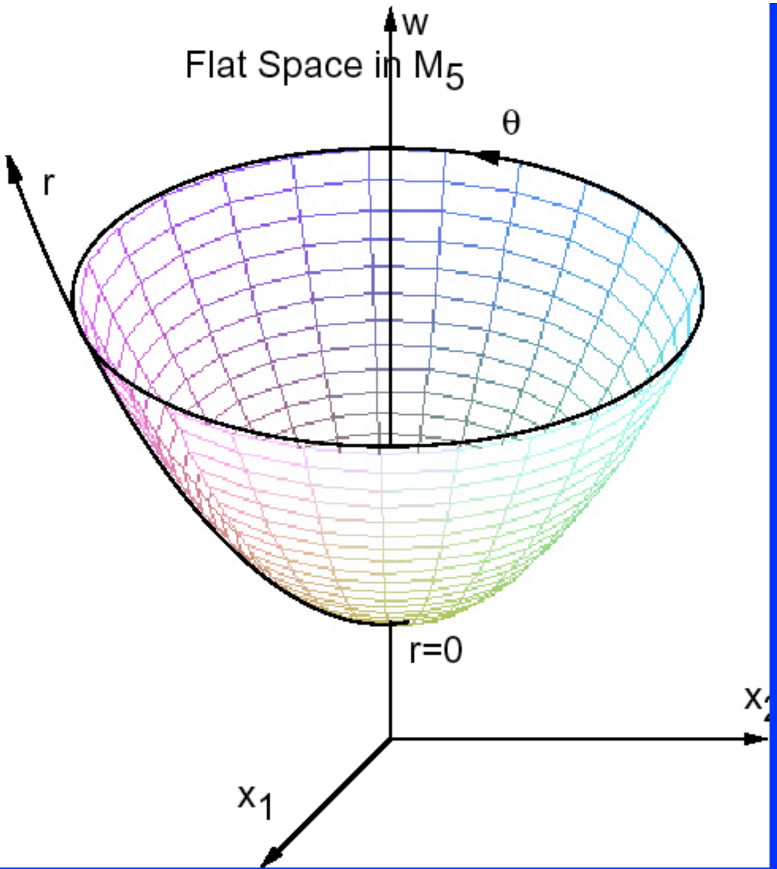
évidence et propriétés

taux (= constante de Hubble)

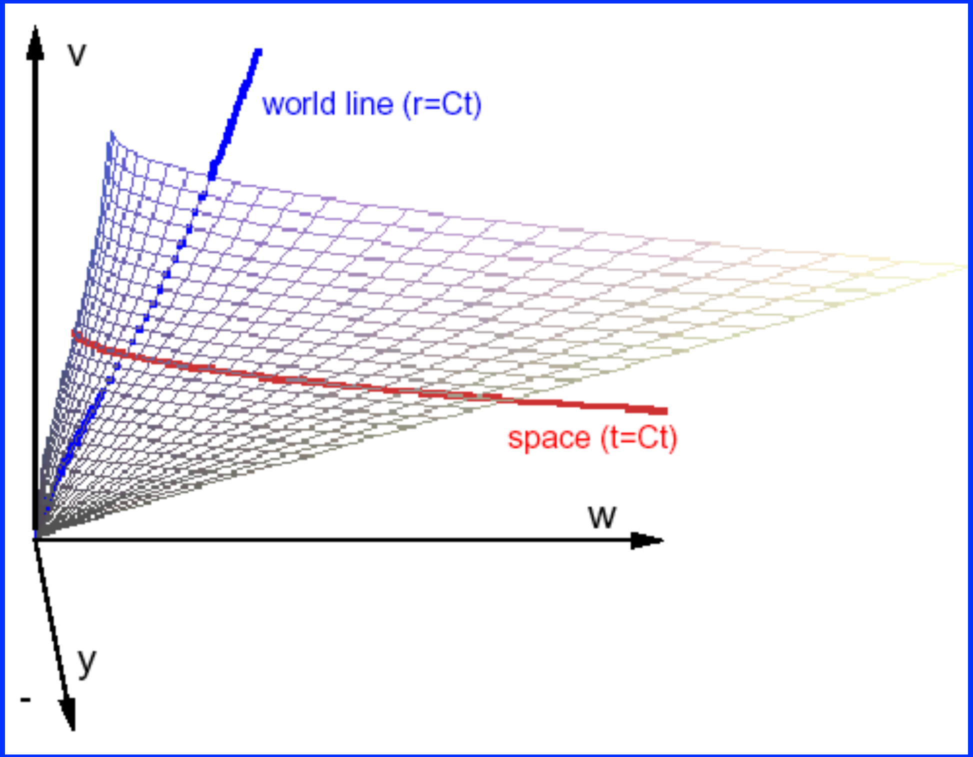
accélération ou décélération

Âge de l'univers

• Constante cosmologique = courbure moyenne de l 'espace-temps



Modèle de big bang avec
Λ=0.7 et Ω =0.3
(le « meilleur »
aujourd'hui)



Modèle de big bang
« Einstein - de Sitter),
avec Λ=0 et Ω = 1
(abandonné aujourd'hui)

Questions cosmiques 2 :
contenu « matériel » de l'univers

Nature, densité et propriétés de la **matière**

masse cachée --> physique des particules

Énergie exotique ? (énergie du vide, quintessence …)

pas d 'évidence

pas de motivation théorique sérieuse

Structuration et **évolution** de la matière visible ou invisible:

formations des galaxies et des structures

problème très actuel --> •

Questions cosmiques 3 : Univers primordial

Que s'est-il passé il y a 15 milliards d'années, quand les conditions physiques étaient très différentes de celles d'aujourd'hui ?
Plus on remonte loin dans le passé, plus on doit faire intervenir une physique différente :

« **Recombinaison** » (à l'âge de 1 million d'années) :

époque de transition

origine du Fond Diffus cosmologique

Physique nucléaire

physique des particules

… inflation, nouvelles théories, transitions de phase

•••

La forme de l’espace-temps

Modèles relativistes

Principe cosmologique ==> modèles Friedmann - Lemaître

Modèles de big bang

Modèles particuliers : Einstein, Minkowski, de Sitter

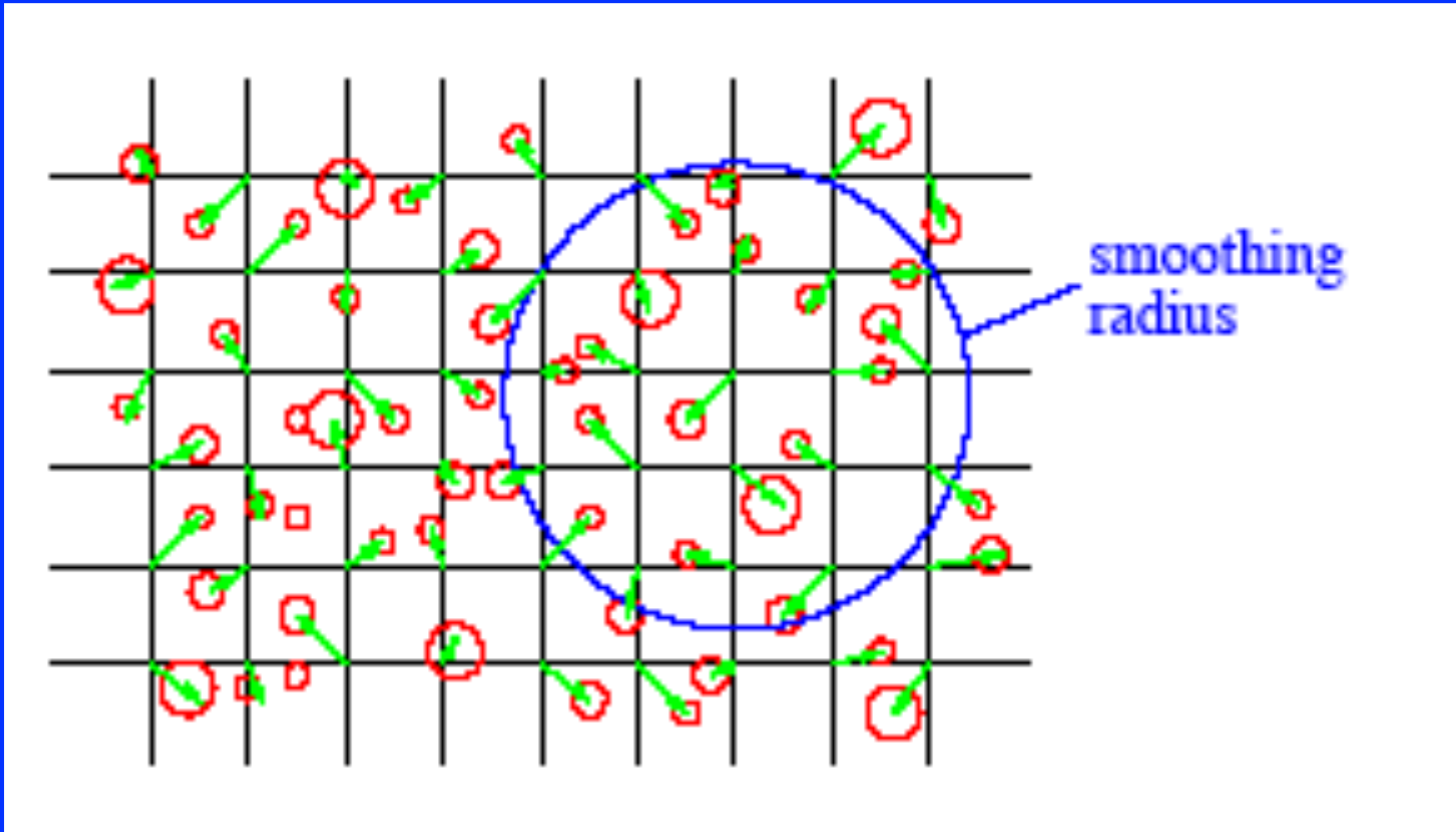
Principe cosmologique

L'espace [les sections spatiales de l'espace-temps] sont à symétrie maximale (=homogènes et isotropes)
→

1) l'espace-temps est simple = espace * temps
Mais les propriétés de l'espace varient
dans le temps (expansion).

2) description simple du contenu énergétique :
Quantités moyennes seulement
(densité d'énergie ρ, pression p)

Principe cosmologique



Métrique Robertson - Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2)\right) \quad .$$

Décalage vers le rouge
(= redshift)

$$1 + z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} = \frac{a_{\mathrm{obs}}}{a_{\mathrm{em}}} \quad .$$

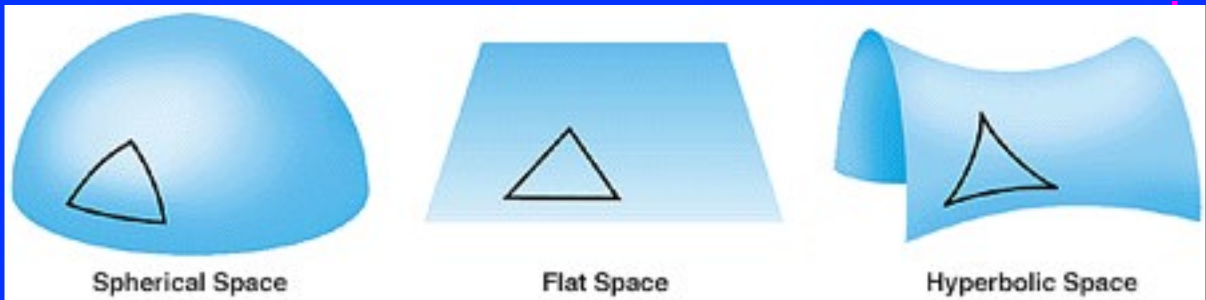
Le principe cosmologique suffit à déterminer une forme

[de Robertson - Walker] pour la métrique :

$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \, d\sigma^2$,

où $d\sigma^2$ est la métrique d'un espace à symétrie maximale :

S^3 (k =1) R^3 (k =0), ou H^3 (k =-1) .



est le **paramètre de courbure spatiale**

La fonction $a(t)$ = **facteur d'échelle** :

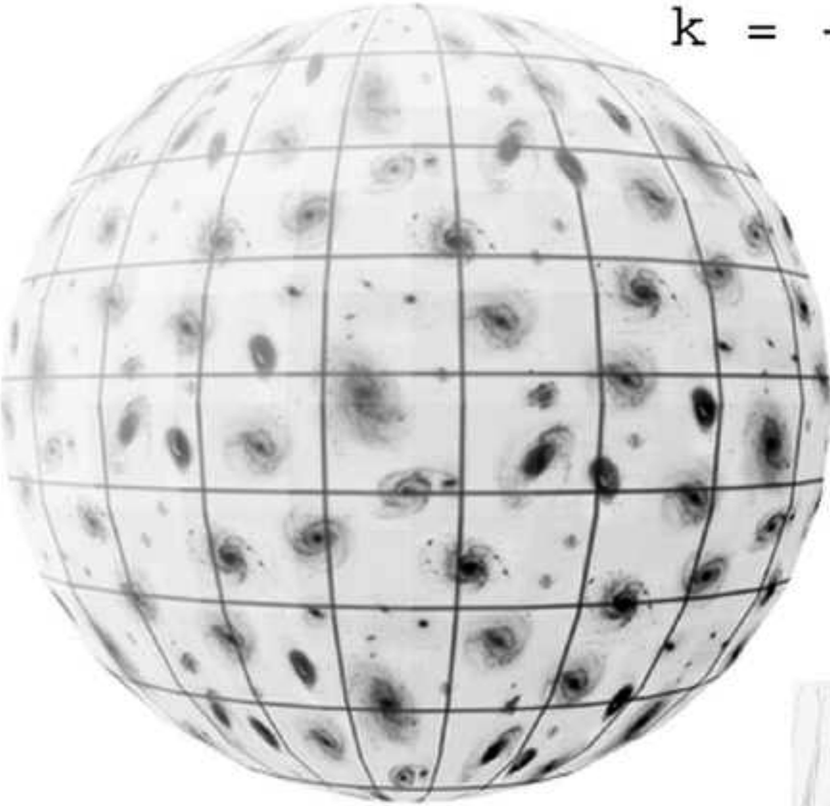
toute longueur cosmique varie proportionnellement à $a(t)$

- (dans des « bonnes » coordonnées)

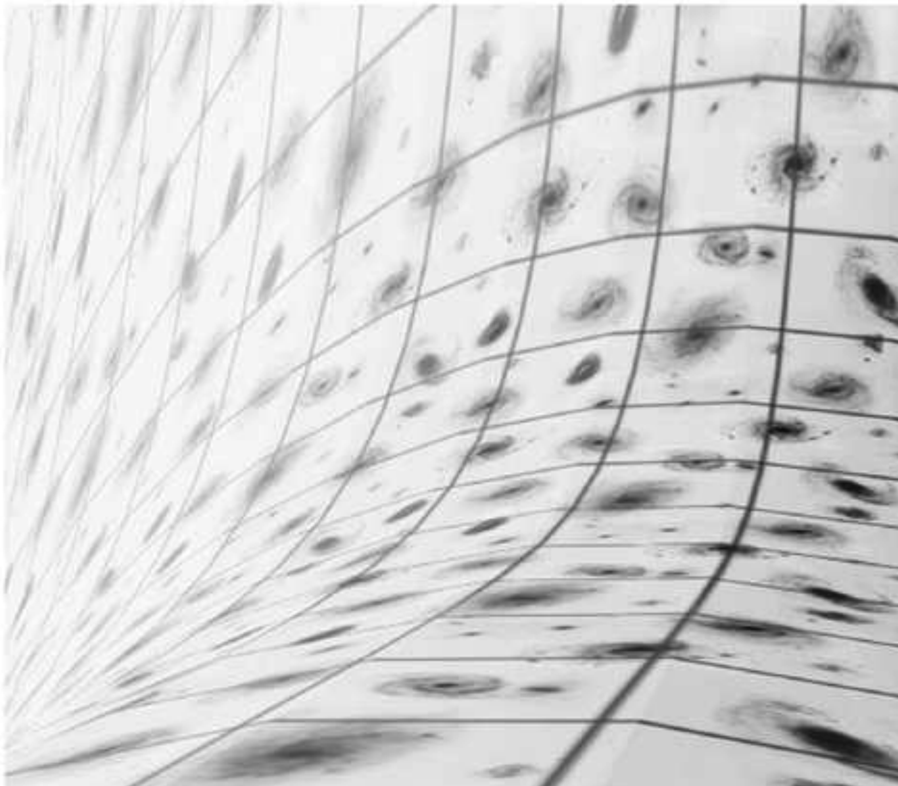
- ceci est indépendant de la théorie de gravitation (Rg ou autre).

Un modèle est déterminé par [$a(t)$, k]

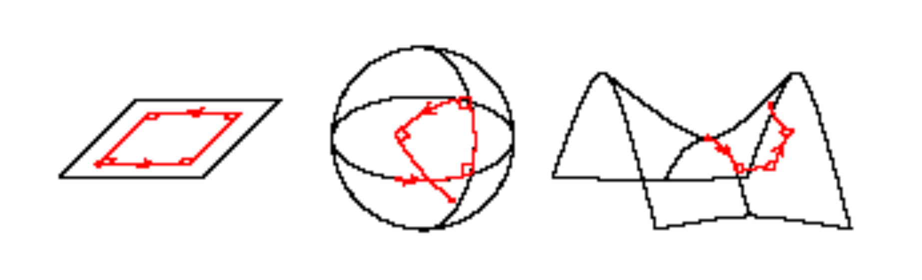
$k = +1$

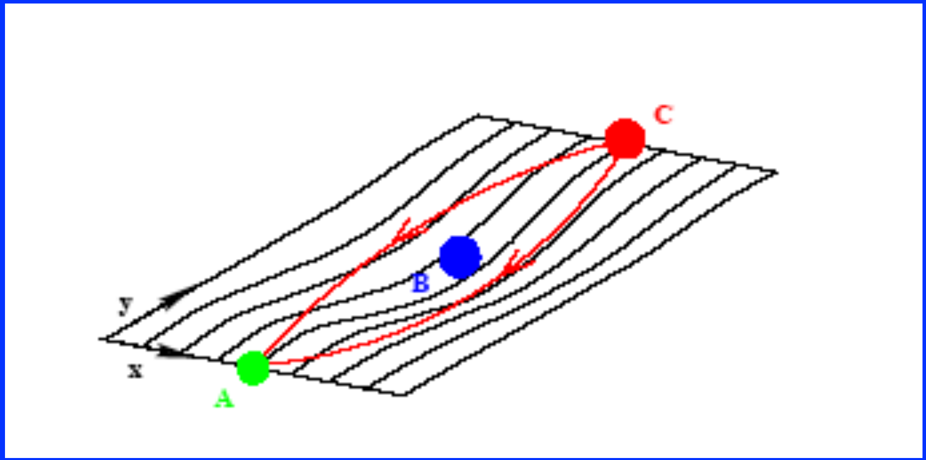


k



$k = 0$




C
B
y
x
A

Temps conforme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \, d\sigma^2$$

On peut toujours effectuer un changement de variable $t \dashrightarrow \eta$ défini par $d\eta = dt / a(t)$.

La métrique s'écrit

$$ds^2 = a(t_{[\eta]})^2 \, [d\eta^2 - a(t)^2 \, d\sigma^2]$$

- Elle est « conformément plate »
- η est le temps conforme (sans signification physique).

Modèles de **Friedmann - Lemaître**

La relativité générale permet de calculer la courbure de l'espace-temps à partir du tenseur d'énergie-impulsion et de Λ, par les équations d'Einstein.

Avec le principe cosmologique,
- la courbure se réduit à $a(t)$ et k.
- Les équations d'Einstein se réduisent aux
  équations de Friedmann.

La matière est décrite par
sa densité moyenne ρ
et sa pression moyenne P.

Modèles Friedmann - Lemaître

- décrits par *a*(*t*) et k.

- Les équations d'Einstein (relativité générale) se réduisent aux **équations de Friedmann** : on peut calculer [*a*(*t*), k] à partir du tenseur d'énergie-impulsion et de Λ.

La matière est décrite par

sa densité moyenne ρ

et sa pression moyenne *P*.

Reliés par une équation d'état

Contenu matériel

perfect fluid form

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu \quad ,$$

densité moyenne ρ
pression moyenne P.
Reliés par une équation d'état

energy conservation equation

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt} a^3$$

Modèles de big bang

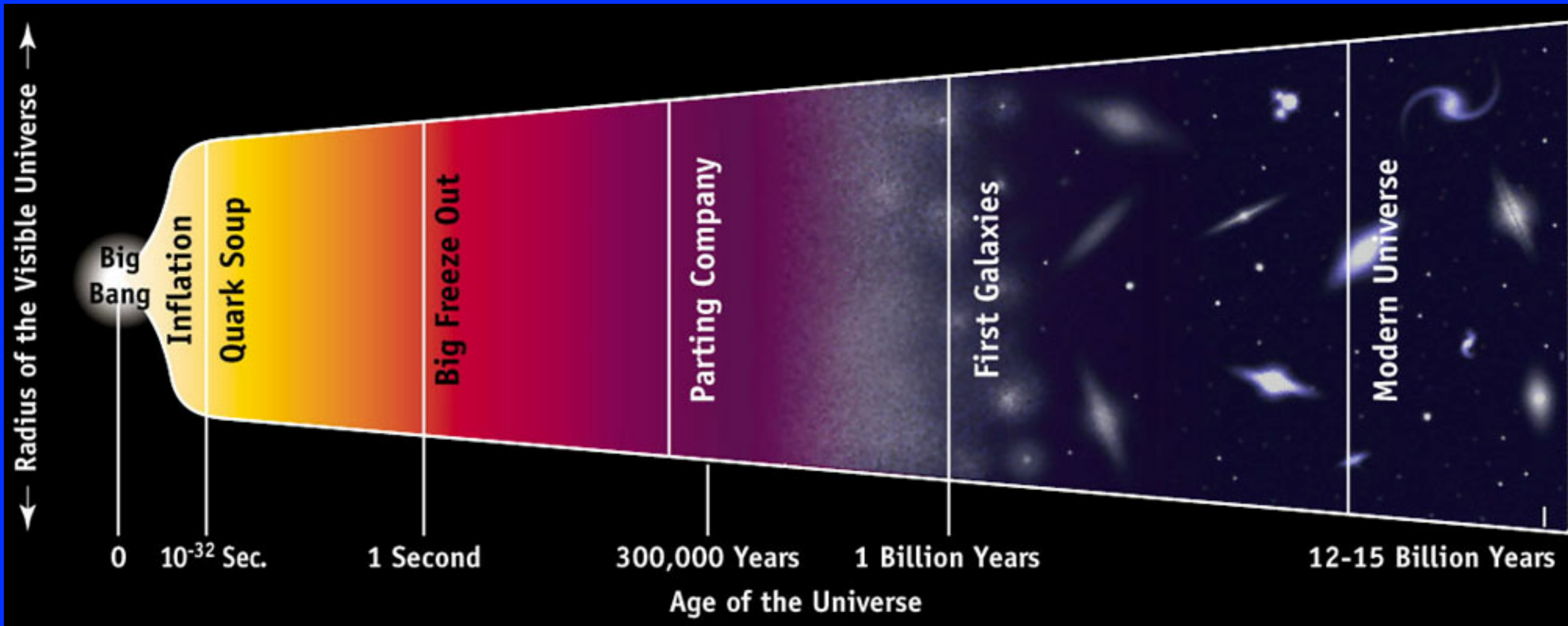
= ceux pour lesquels le facteur d 'échelle s annule

pour une valeur t_i de t finie : $a(t_i) = 0$.

(en fait, cette cosmologie ne tient pas compte des effets quantiques qui pourraient empêcher une telle singularité.

Il vaut mieux remplacer la condition par $a(t_i) = L_{planck}$

Modèles de big bang



Field equations

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \qquad \text{expansion rate}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \qquad q \equiv -\frac{\ddot{a}}{a}\frac{1}{H^2} \quad \text{deceleration parameter}$$

$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda + \ldots\ldots$$

whatever:	$p_w = w\rho_w$	$w = p/\rho$	$\rho_w \propto (1+z)^{3(1+w)}$
matter:	$p_M = 0$	$w = 0$	$\rho_M \propto (1+z)^3$
radiation:	$p_R = \rho_R/3$	$w = 1/3$	$\rho_R \propto (1+z)^4$
vacuum:	$p_\Lambda = -\rho_\Lambda$	$w = -1$	$\rho_\Lambda \propto (1+z)^0$

Le problème cosmologique

Trouver [$a(t)$, k]

- par mesure directe de la géométrie de l'espace-temps
- ou par résolution des équation d'Einstein : cela exigerait de connaître le contenu et Λ.

---> une combinaison des deux.

-Plusieurs types d'observations nous apportent tel ou tel type d'info sur [$a(t)$, k]

Loi d ’expansion : exprimée par la fonction $a(t)$

••• $a_0 = a(t_0)$ = rayon de courbure actuel (convention)

••• Première dérivée (logarithmique) == **taux d’expansion** $H(t)$,

= paramètre de Hubble

aujourd’hui la **constante de Hubble** $H_0 = (a'/a)_0$.

--> Loi de Hubble :

Toute distance cosmique D varie proportionnellement à $a(t)$:

$V = D' = (a'/a)\, D = H_0\, D$ *aujourd’hui*

••• Seconde dérivée (aujourd’hui) :

paramètre de décélération $q_0 = - a'' a / (a')^2$.

Son signe indique accélération ou décélération de l’expansion.

Les observations donnent H_0 .

Différents tests cosmologiques fournissent des combinaisons de k et q_0 .

Paramètres de la géométrie de l'espace-temps:

- H_0 et q_0 (loi d'expansion = dynamique de l'univers)
- k = le paramètre de courbure spatiale
- Λ statut à part
- contenu : à paramétrer :

par l'intermédiaire du modèle Einstein - de Sitter

Friedmann-Lemaître equation

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{a^2} \quad ,$$

Aujourd 'hui

Le taux présent d'expansion $H(t_0)$ est

la constante de Hubble H_0

Une distance *D* varie proportionnellement à *a*,

$V = D' = (a'/a)\, D$.

On note $(a'/a)_0 = H_0$.

De l 'équation de Friedmann on déduit

$(H_0)^2 + k / (a_0)^2 = (8\pi G)\, \rho_0 / 3 + \Lambda /3$

$$H_0\, d_L(z) = z + \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2 + \cdots$$

Un modèle simple **(=Einstein - de Sitter)**

On suppose Λ = k= p= 0.

Pas de constante cosmologique, pression nulle

Sections spatiales euclidiennes (= « plates »)

Ceci implique $\rho_0 = 3\,(H_0)^2 / (8\pi\, G) = \rho_{critique}$

Ceci définit la ***densité critique*** $\rho_{critique}$

Dans les années 1970-1980, ceci était considéré comme le meilleur modèle pour décrire notre univers (*cold dark matter*).

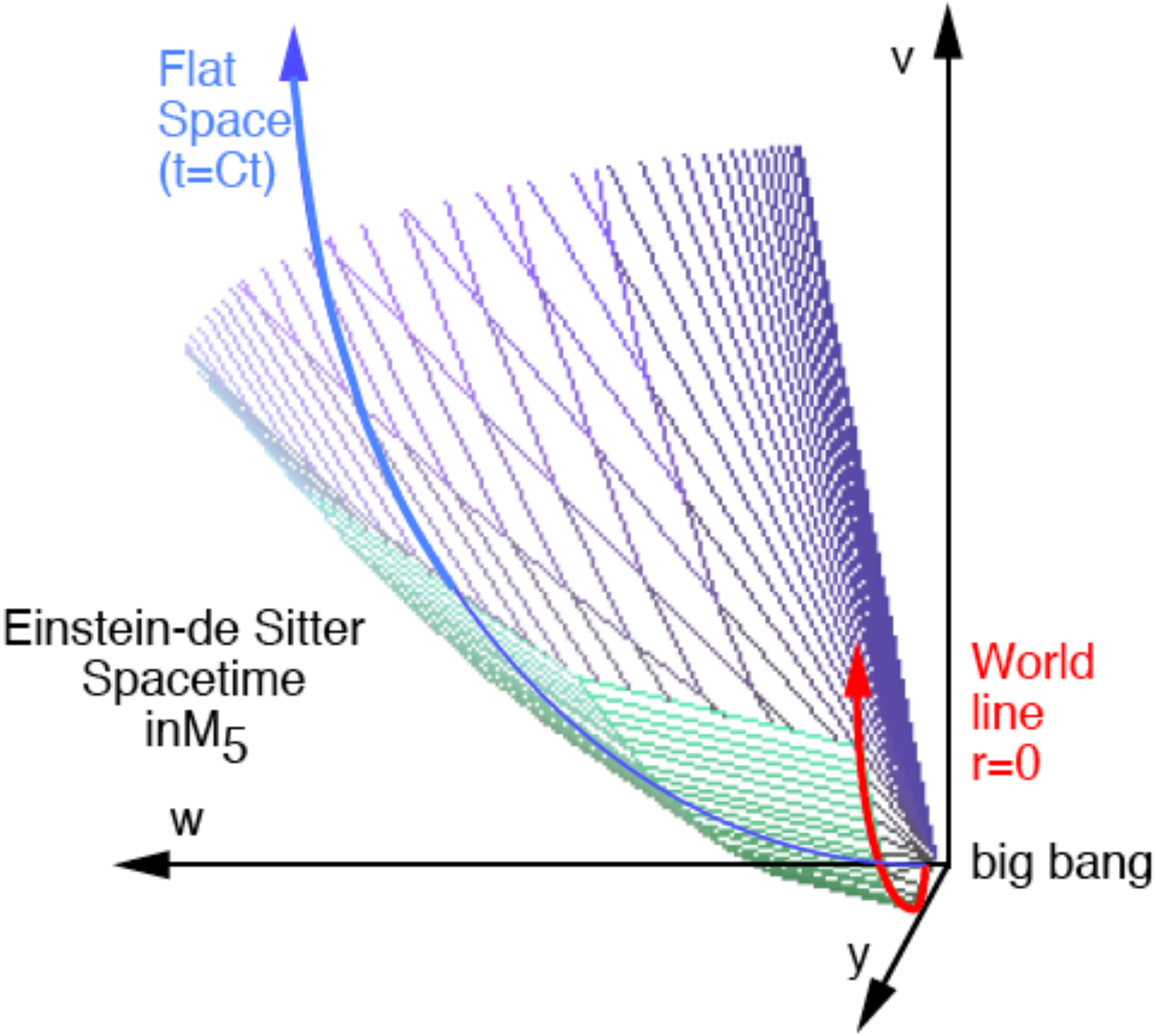


Fig. 3. The Einstein-de Sitter model (with flat spatial sections) embedded in a flat Lorentzian space. Both spatial sections ($t = Ct$) and inertial world lines ($r = Ct$) are parabolas.

Pour une notation harmonieuse, on écrit aussi:

$\Lambda / 3 (H_0)^2 = \lambda = \Omega_\Lambda$

On a donc, de manière générale,

$$1 + k / (H_0 \ a_0)^2 = \Omega_{contenu} + \Omega_\Lambda$$

Un univers à sections spatiales euclidiennes vérifie donc

$$\Omega_{contenu} + \Omega_\Lambda = 0.$$

La ***densité critique*** $\rho_{critique}$, définie à partir du modèle EdS, est utilisée comme unité cosmologique de densité d'énergie:

Pour chaque forme d'énergie ρ, on posera $\Omega = \rho / \rho_{critique}$.

Par exemple, $\Omega_{matière} = \rho_{matière} / \rho_{critique}$

$\Omega_{bar} = \rho_{bar} / \rho_{critique}$

ATTENTION : Ω est une quantité définie aujourd'hui seulement !

Pour une notation harmonieuse, on écrit aussi: $\Omega_\Lambda = \Lambda / (3 H_0^2) = \lambda$

L'équation de Friedmann implique

$$1 + k / (H_0 \; a_0)^2 = \Omega_{matière} + \Omega_\Lambda$$

Univers (« plat ») à **sections spatiales euclidiennes** : $\Omega_{matière} + \Omega_\Lambda = 0.$

- N.b.: on écrit quelquefois $\Omega_{courbure} = - k / (H_0 \; a_0)^2$
  --> $\Omega_{matière} + \Omega_\Lambda + \Omega_{courbure} = 1$

Contenu

Plusieurs formes d'énergie dans l'univers peuvent être source de gravitation:

Matière (baryonique ou non baryonique) : $P = 0$

Rayonnement (électromagnétique ou gravitationnel, neutrinos s'ils n'ont pas de masse) : $P = \rho / 3$

Énergie « exotique » = $\rho > 0$ (?), $P < 0$.

En particulier « énergie du vide » $P = - \rho$.

Dilution

Ces formes d 'énergie se diluent avec l'expansion :

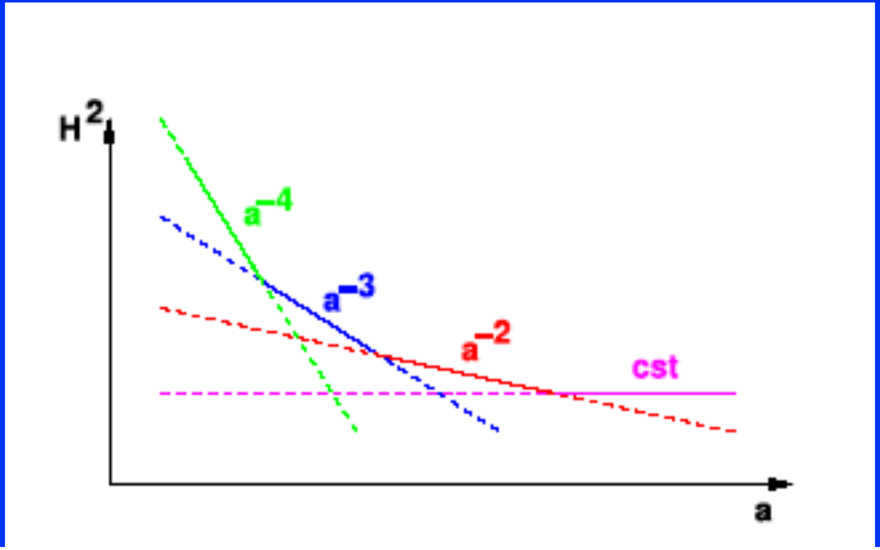
Matière : $\rho \propto a^{-3}$

Rayonnement : $\rho \propto a^{-4}$

Énergie du vide : $\rho \propto$ Ct

Rem.: on peut **formellement** écrire la contribution de la constante cosmologique sous la forme $\rho_\Lambda = \Lambda /(8\pi G)$, $p_\Lambda = - \rho_\Lambda$.

--> amalgame



Relations entre les paramètres:

Les équation de Friedmann impliquent

$2\, q_0 = \Omega_{\text{matière}}$ [+ $2\, \Omega_{\text{rayonnement}}$]- $2\, \Omega_\Lambda$

$\Omega_{\text{matière}}$ [+ $\Omega_{\text{rayonnement}}$] + $\Omega_\Lambda - 1 = k / (H_0^2\, a_0^2) = - \Omega_{\text{courbure}}$

équation de Friedmann sans dimension :

On pose $x = a/a_0 = 1/(1+z)$

$(x')^2 = F^{-2}(x)$,

Avec $F(x) = \Omega_{\text{matière}} / x + \Omega_{\text{ray}} / x^2 + x^2\, \Omega_\Lambda + \Omega_{\text{courbure}}$

Où $x(t)$ est la seule quantité à varier

Connaître les paramètres cosmologiques

• âge de l'univers
• abondances des éléments légers
(<-- nucléosynthèse primordiale)

• **Tests cosmologiques** : observer des objets « standard » pris comme traceurs de la géométrie (spatio-temporelle) ; amas de galaxies, **supernovae** (--> •), ...

Difficile de séparer les aspects spatiaux et temporels

•••

CLOSED MODEL WITH Ω =2

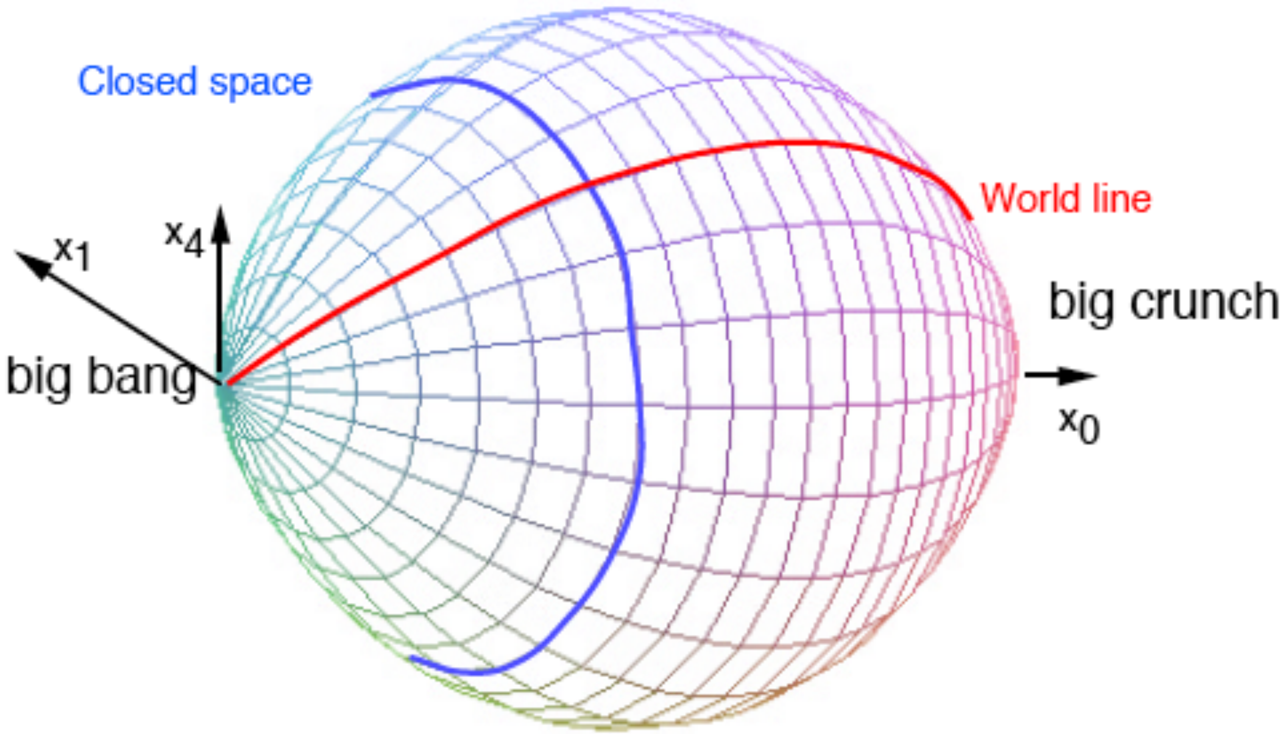


Fig. 7. Closed RW model (purely matter dominated, with $\Omega = 2$) embedded in a flat Lorentzian space. Spatial sections ($t = Ct$) are circles. Inertial world lines ($r = Ct$) are the arcs of a parabola illustrated in Fig. 6.

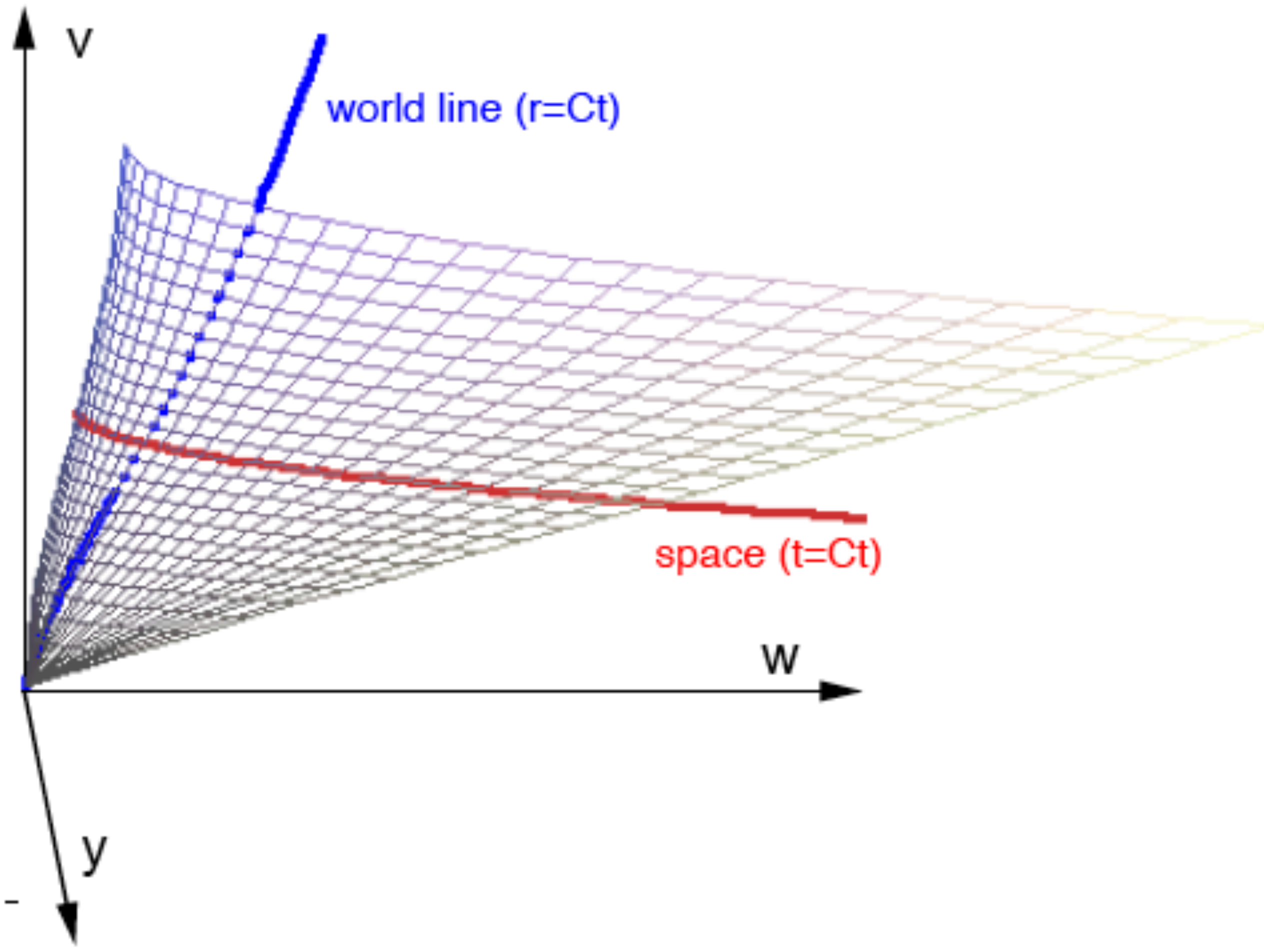


Fig. 5. RW model with $\lambda = 2\omega = 2/3$, embedded in a flat Lorentzian space

Âge de l 'univers

= temps écoulé depuis le moment où $a(t)$ s'est annulé :

$$t_U = H_0^{-1} \int_0^1 dx \, (\Omega_{mat} / x + \Omega_{ray} / x^2 + x^2 \, \Omega_\Lambda + \Omega_{courbure})^{-1/2}$$

Par définition, il est fini dans les modèles de big bang.

[Ex. $t_U = 2/3 \quad H_0^{-1}$ pour le modèle Einstein-de Sitter]
Si l'on suppose $\Lambda = 0$:
$t_U = 6.52.10^9 \, h^{-1}$ années si $\Omega_{matière} = 1$.
$\Omega_m > 1 \implies t_U < 6.52 \; 10^9 \, h^{-1}$ années.
$\Omega_m < 1 \implies 6.52 \; 10^9 \, h^{-1} < t_U < 9.78 \; 10^9 \, h^{-1}$.

Une constante cosmologique positive (resp. négative) rallonge (resp. raccourcit) ces valeurs.

âges des étoiles les plus vieilles

Du même ordre de grandeur que H_0^{-1} :

forte indication en faveur du big bang.

Trois méthodes différentes:

- nucléochronologie
- décroissance de luminosité des naines blanches
- turn - off de la séquence principale dans les amas globulaires

t_U =12 G-années (amas les plus vieux)

+ durée de formation de l'amas (0.8 - 2 selon modèle)

--> t_U = 13.47 (t_U > 11)

h_0 =.7 ==> $\Omega_{matière}$ < 1, Ω_Λ >0.

âges des étoiles les plus vieilles

Du même ordre de grandeur que H_0^{-1} :

forte indication en faveur du big bang.

Trois méthodes différentes:

- nucléochronologie
- décroissance de luminosité des naines blanches
- turn - off de la séquence principale dans les amas globulaires

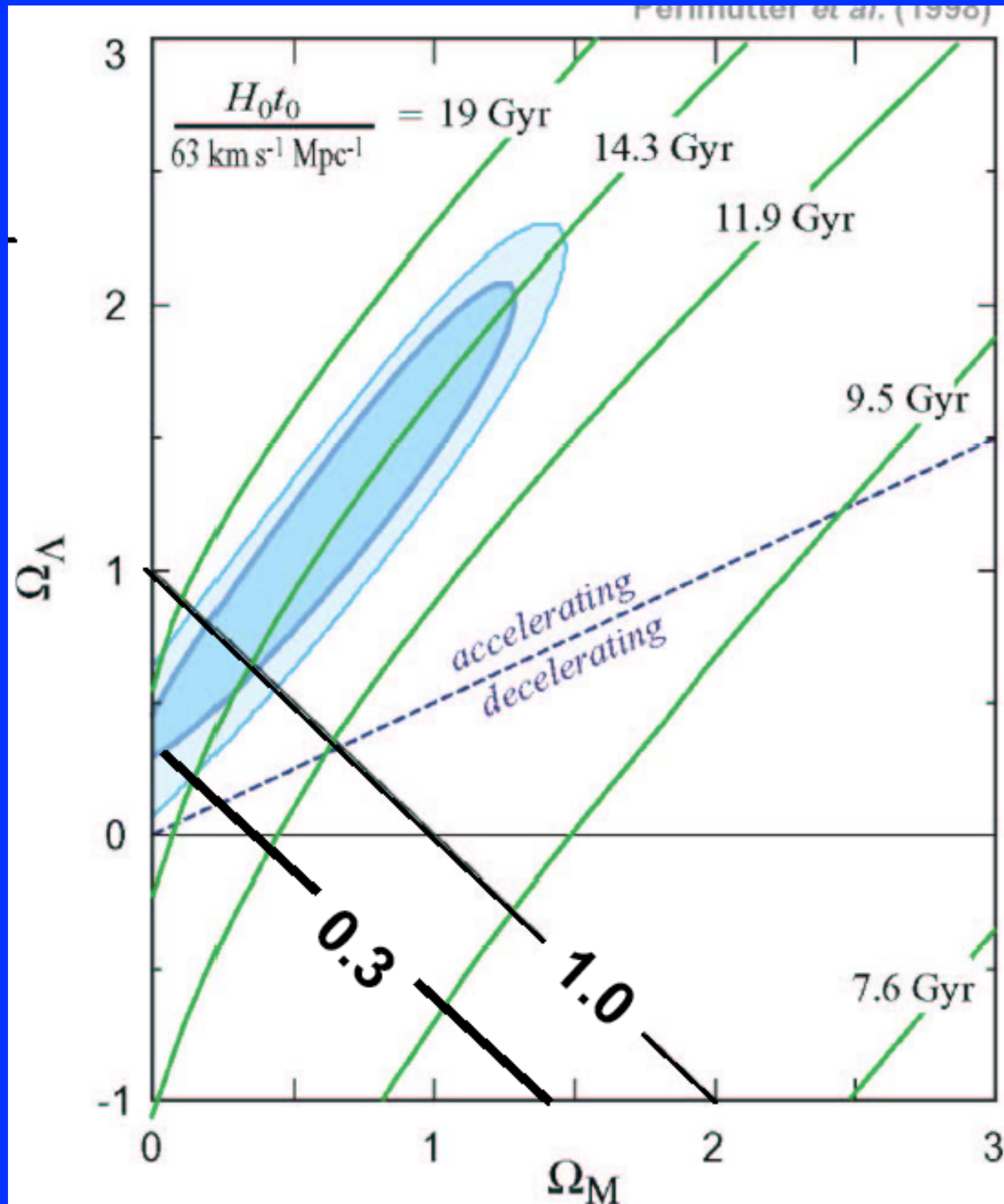
t_U =12 G-années (amas les plus vieux)

\+ durée de formation de l'amas (0.8 - 2 selon modèle)

--> t_U = 13.47 (t_U > 11)

h_0 =.7 ==> $\Omega_{\text{matière}} < 1$, $\Omega_\Lambda > 0$.

Age



Perlmutter et al. (1998)
$\frac{H_0 t_0}{63\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}}$ = 19 Gyr
14.3 Gyr
11.9 Gyr
9.5 Gyr
7.6 Gyr
accelerating
decelerating
0.3
1.0
Ω_Λ
Ω_M

(IV) Quelques modèles cosmologiques

Espace-temps complètement symétriques

Il en existe trois seulement : Minkowski, de Sitter et anti-de Sitter.

de Sitter : expansion, sections spatiales = S^3 (3-sphère).
Peut-être vu comme un hyperboloïde à 4 dimensions dans un espace plat à 5 dimensions.
C'est la solution des équation de Friedmann (sans contenu) avec $\Lambda > 0$

anti-de Sitter : les lignes de temps sont fermées (!),
sections spatiales = H^3 (espace hyperbolique).
Peut-être vu comme un hyperboloïde à 4 dimensions dans un espace plat à 5 dimensions.

Espace-temps de Minkowski

Une solution formelle de la relativité générale.
Non physique car : pas de contenu, pas d'expansion.

Métrique $ds^2 = dt^2 - d\sigma^2$

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)$$

Géodésiques radiales : $r = A\, t + B$
Matière (lignes de temps) = $A > 0$
Lumière $A = 1$

NB. Par un changement de variable $t=\tau \cosh \alpha$, $r=\tau \sinh \alpha$,
la **même métrique** s'écrit :

$$ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 \; [d\alpha^2 + \sinh^2 \alpha \;\; (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)]$$

Décrit un univers en expansion, à sections spatiales hyperboliques
--> Attention !

de Sitter

Métrique canonique : $ds^2 = dt^2 - \cosh^2(t/L)\ d\sigma_+{}^2$
où $\Lambda = 1/L^2$ est la constante cosmologique,
où $d\sigma_+{}^2$ est la métrique de la 3-sphère S^3 de rayon L.

C'est une forme Robertson-Walker de la métrique, de facteur d'expansion $a(t) = \cosh(t/L)$

• expansion accélérée : bonne approximation de notre univers aujourd'hui (la meilleure?)
• inflation
• symétrie maximale

--> le vide géométrique ?

Le même espace-temps (en fait différentes parties) sont décrites par des formes différentes de la métrique -->

Changements de variables :

1) $\sinh(t/L) = \sinh(T/L) \cosh(\alpha)$

$\cosh(t/L) \sin(r) = \sinh(T/L) \sinh(\alpha)$

$\cosh(t/L) \cos(r) = \cosh(T/L)$

Donne $ds^2 = dT^2 - \sinh^2(t/L)\ d\sigma_-^2$

où $d\sigma_-^2$ est la métrique de l'espace hyperbolique H^3 de rayon L.

2) $\sinh(t/L) = \sinh(v/L) + \rho^2 e^{v/L} /2 L^2$

$\cosh(t/L) \sin(r) = \rho\, e^{v/L} / L$

$\cosh(t/L) \cos(r) = \cosh(v/L) - \rho^2 e^{v/L} /2 L^2$

Donne $ds^2 = dv^2 - e^{2v/L}\, d\sigma_0^2$

où $d\sigma_0^2$ est la métrique de l'espace Euclidien R^3.

3) $ds^2 = (1-\Lambda R^2/3)\, d\tau^2 - (1-\Lambda R^2/3)^{-1}\, dR^2 - R^2\, d\omega^2$

(forme statique).

Forme sans dimension des équation de Friedmann

Les équation de Friedmann impliquent

$2\ q_0 = \Omega_{\text{matière}} + 2\ \Omega_{\text{rayonnement}} - 2\ \Omega_\Lambda$

$\Omega_{\text{matière}} + \Omega_{\text{rayonnement}} + \Omega_\Lambda - 1 = k / (H_0^2\ a_0^2) = -\ \Omega_{\text{courbure}}$

On peut les écrire sous une forme sans dimension :

En posant $x = a/a_0 = 1/(1+z)$

$(x')^2 = F^{-2}(x)$,

Avec $F(x) = \Omega_{\text{mat}} / x + \Omega_{\text{ray}} / x^2 + x^2\ \Omega_\Lambda + \Omega_{\text{courbure}}$

Où $x(t)$ est la seule quantité à varier

Âge de l 'univers

Par définition, c'est le temps écoulé depuis le moment où $a(t)$ s'est annulé :

$$t_U = H_0^{-1} \int_0^1 dx\, (\Omega_{mat}/x + \Omega_{ray}/x^2 + x^2\,\Omega_\Lambda + \Omega_{courbure})^{-1/2}$$

Par définition, il est fini dans les modèles de big bang.

(V) Cosmologie observationnelle

(voir CosmoObs)